BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2014

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOTECHNOLOGIES

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

<u>L'annexe page 6/6 est à rendre avec la copie.</u>

EXERCICE 1 (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} *près.*

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes à essais destinés à des laboratoires.
L'objectif de l'exercice est d'analyser la qualité de la production.

Partie A

La direction de l'entreprise affirme que la probabilité qu'un tube à essais ait un défaut est égale à 0,04.

On prélève au hasard 100 tubes à essais dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 tubes à essais, associe le nombre de tubes à essais présentant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Déterminer la probabilité de l'événement A : « Le prélèvement contient exactement 5 tubes à essais présentant un défaut ».
3. Déterminer la probabilité de l'événement B : « Le prélèvement contient au plus 2 tubes à essais présentant un défaut ».

Partie B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à un tube à essais prélevé au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètres. Le service qualité de l'entreprise estime que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 19,9 et d'écart type 0,25.

1. Déterminer la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre compris entre 19,5 mm et 20,5 mm.
2. Déterminer la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre supérieur ou égal à 20 mm.

Partie C

Le réglage d'une machine de production est tel que 3 % des tubes à essais fabriqués ont une épaisseur non conforme.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes à essais d'épaisseur non conforme dans un échantillon de 200 tubes à essais.
2. On prélève un échantillon de 200 tubes à essais. On constate que dans cet échantillon 12 tubes à essais ont une épaisseur non conforme.

   Ce constat remet-il en question le réglage de la machine de production ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 (4 points)

Dans un lac de montagne, on a observé qu'une population de poissons diminuait de 6 % tous les ans en raison d'une modification écologique du lac.

On s'intéresse au nombre de poissons, *n* années après la première observation effectuée en 2004, où l'on comptait 3500 poissons.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 3500$, u_n fournissant une estimation du nombre de poissons l'année 2004 + *n*.

1. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

2. On propose l'algorithme suivant :

```
Variables : U, N

Initialisation :

U prend la valeur 3500
N prend la valeur 0

Traitement :
        Tant que U > 2500
                U prend la valeur U × 0,94
                N prend la valeur N+1
        Fin du tant que

Sortie
Afficher N
```

Déterminer la valeur de N obtenue en faisant fonctionner l'algorithme et interpréter le résultat.

3. En 2010, une association s'est mobilisée pour améliorer les conditions écologiques du lac. Depuis, la population de poissons a augmenté de 4 % chaque année.
   En 2010, l'association a constaté que le lac contenait 2400 poissons.
   a) Déterminer le nombre de poissons présents en 2014.
   b) Si cette augmentation se maintient au même rythme, en quelle année la population de poissons observée retrouvera-t-elle la valeur de l'année 2004 ?

EXERCICE 3 (5 points)

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries dans une gélose nutritive non renouvelée.

Partie A

On admet que le nombre de bactéries en fonction du temps est donnée à l'instant t (exprimé en heures) par $N(t)$ où N, fonction définie sur $[0,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,92y$.

Le nombre de bactéries à l'instant initial est égal à 525.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer la fonction N, solution de l'équation différentielle (E) sur $[0,+\infty[$, qui vérifie la condition $N(0) = 525$.

Partie B

On admet que la fonction N est définie sur $[0,+\infty[$ par $N(t) = 525\,\mathrm{e}^{-0,92t}$ et on note $\mathscr{C}_N$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction N en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on donner de cette limite ?
2. Calculer $N'(t)$ où N' désigne la fonction dérivée de N.
3. $N'(t)$ représente la vitesse instantanée de l'évolution du nombre des bactéries à l'instant t ; cette vitesse est exprimée en nombre de bactéries par heure.
   Déterminer la vitesse instantanée pour $t = 0$ puis pour $t = 3$.
4. Au bout de combien de temps la vitesse instantanée est-elle égale à la moitié de celle à l'instant $t = 0$?

EXERCICE 4 (6 points)

Le but de cet exercice est de comparer les résultats, obtenus par expérience et selon un modèle théorique, d'un titrage d'une solution d'hydroxyde de sodium (NaOH) par une solution d'acide chlorhydrique (HCl).

Partie A : Expérience et approximation affine

Lors d'une expérience, on obtient les mesures suivantes :

Numéro de la mesure	1	2	3	4	5	6
Volume en ml d'acide versé : x_i	0	10	20	40	50	60
pH : y_i	11,80	11,68	11,52	11,32	11,22	11,08

1. Sur l'annexe page 6, représenter le nuage de points $M_i\,(x_i\,,\,y_i)$.
2. a) À l'aide d'une calculatrice, donner une équation de la droite D d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 10^{-4} près).

   b) En utilisant l'ajustement réalisé à la question précédente, déterminer le pH du mélange après versement de 35 ml d'acide chlorhydrique.

Partie B : Modèle théorique

Pour un volume x (en ml) d'acide chlorhydrique ajouté, compris entre 0 et 150, le pH de la solution est égal à $f(x)$ où f est la fonction définie sur $[0,150]$ par :

$$f(x) = 3{,}8 - 0{,}01\,x + \frac{8}{1 + \mathrm{e}^{0,2x-16}}$$

La fonction f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0,150]$.

1. a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0,150]$: $f'(x) = -\,0{,}01 - \dfrac{1{,}6\,\mathrm{e}^{0,2x-16}}{\left(1+\mathrm{e}^{0,2x-16}\right)^2}$

   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0,150]$.
2. Représenter la courbe représentative de f sur le graphique de la partie A, annexe page 6.

Partie C : Comparaison

1. Pour 60 ml d'acide versé, comparer la valeur du pH obtenue par l'ajustement affine réalisé dans la partie A et celle obtenue par le modèle théorique de la partie B.
2. Le modèle théorique étant validé, l'ajustement affine réalisé dans la partie A pour x appartenant à $[0,60]$ semble-t-il pertinent sur $[0,150]$? Argumenter la réponse.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 4